# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ ЖЕСТКОЙ КОЛОННЫ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ

## 5.1 Краткие теоретические сведения. Основные определения и формулы

На практике довольно часто можно встретить различные комбинации простых напряженных состояний, к примеру, сочетание изгиба с растяжением или сжатием, что обуславливается внецентренным приложением нагрузки. В условиях такого сложного сопротивления работают опоры сооружений, стойки строительных конструкции, колонны и так далее.

Внецентренным растяжением (сжатием) называется вид деформации, когда сила параллельна оси бруса *z*, но точка ее приложения или полюс *К* (центр давления) не совпадает с центром тяжести сечения (рисунок 17). Расстояние от точки *К* до оси *z* называется эксцентриситетом - *e*.

Внутренние усилия в любом сечении равны:

$$N = \pm P; \quad M_z = N \cdot e_y; \quad M_y = N \cdot e_z, \tag{5.1}$$

а напряжение в произвольной точке сечения определяется формулой:

$$\sigma = -\frac{N}{F}\left(1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2}\right), \tag{5.2}$$

где $''\pm''$ – знаки, соответствующие приложению растягивающей или сжимающей внешней силы $\pm P$;

$N = \pm P$ – внутреннее продольное усилие в произвольном сечении бруса;

$F$ - площадь поперечного сечения;

$i_z, i_y$ - радиусы инерции.

$e_z, e_y$, - координаты точки приложения равнодействующей силы N.

Уравнение нейтральной линии $\sigma = 0$ находится из (5.2)

$$\frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2} = -1. \tag{5.3}$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях *z* и *y* (рисунок 18) можно определить из (5.3), предположив, что $z = 0$ и $y = 0$,

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}; \quad y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}. \tag{5.4}$$

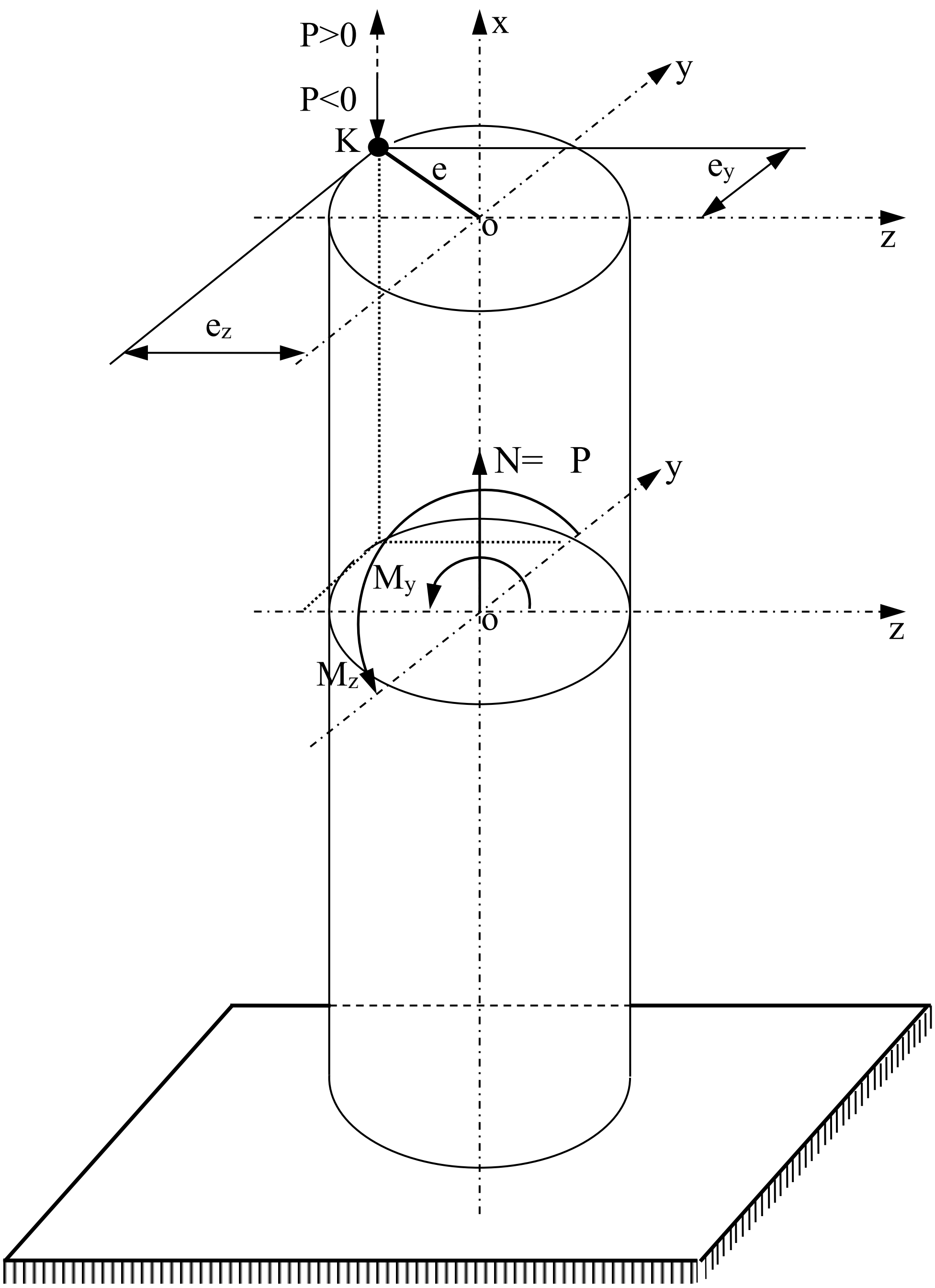


Рисунок 17

Нейтральной осью можно назвать линию пересечения плоскости поперечного сечения бруса с нейтральным слоем, где напряжения равны нулю.

Область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложение силы вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака, называется ядром сечения.

При построении нулевой линии необходимо учитывать два основных правила:

- если точка приложения силы расположена внутри ядра сечения, то нейтральная линия проходит вне поперечного сечения;

- если точка приложения силы находится вне ядра сечения, то нейтральная линия пересекает поперечное сечение в точках, принадлежащих квадранту, противоположному тому, в котором расположен полюс приложения силы (рисунок 18).

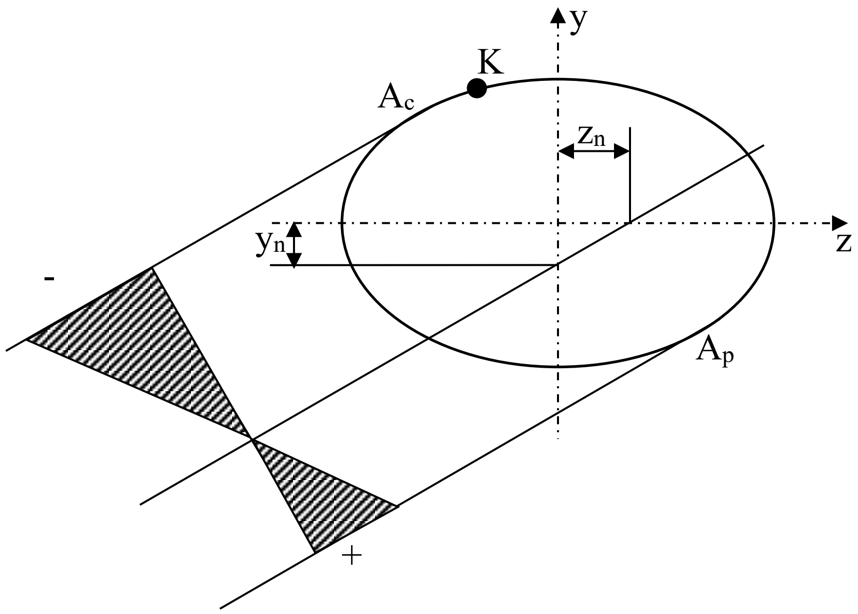


Рисунок 18

Для наиболее общего случая, когда $[\sigma_p] \neq [\sigma_c]$, условия прочности для точек с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями (соответственно точек $A_p$ и $A_c$ на рисунке 18) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{max_P} &= |\sigma_p| \leq [\sigma_p]; \\ \sigma_{max_C} &= |\sigma_c| \leq [\sigma_c], \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $[\sigma_p], [\sigma_c]$ – соответственно, допускаемые напряжения материала бруса на растяжение и сжатие ($[\sigma_p] < [\sigma_c]$ - хрупкий материал, $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$- пластичный).

Эпюра напряжений приведена на рисунке 18.

При рассмотрении задачи на внецентренное сжатие особое внимание следует обратить на то, что эксцентричная сжимающая сила, может вызывать в поперечном сечении конструкции растягивающие напряжения, что является довольно опасным для стойки изготовленной из хрупкого материала (камня, кирпича, бетона и др.).

В связи с выше сказанным, представляет большой практический интерес знать то максимальное значение эксцентриситета, при котором в сечении не будут возникать напряжения растяжения, то есть ту область вокруг центра тяжести, внутри которой, приложение силы $N = -P < 0$ вызывает во всех точках поперечного сечения сжимающие напряжения $\sigma < 0$.

## 5.2 Пример расчета (РПР № 5)

На короткую чугунную опору в точке «*K*» действует сжимающее усилие *P* (рисунок 19). Необходимо найти положение нулевой линии, наибольшее растягивающее и сжимающее напряжения и допускаемую нагрузку $[P]$, приняв $a = 4см,\ b = 3см,\ [\sigma_p] = 25МПа,\ [\sigma_c] = 100МПа.$

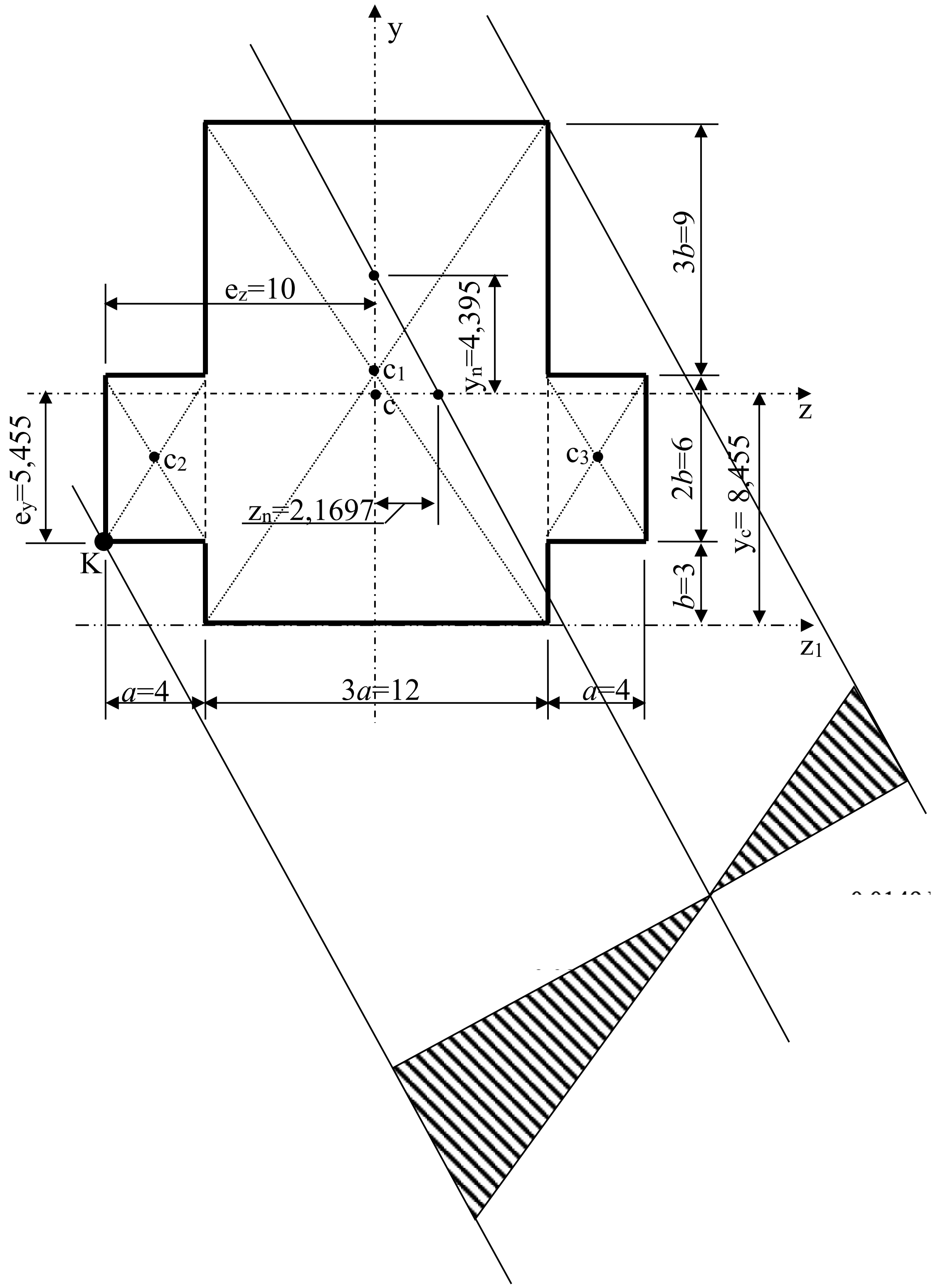


Рисунок 19

5.2.1 Определим положение главных центральных осей инерции $z$ и $y$ (рисунок 19), то есть положение центра тяжести, (в данном случае он лежит на оси симметрии (на оси $y$).

Проведем вспомогательную ось $z_1$. Разобьем сечение на три прямоугольника (один большой – «средний» и два маленьких – «по краям»).

Для решения задачи необходимо найти основные геометрические характеристики, такие как: $F_i$ – площади участков ($i=1,2,3$); $y_i$ – координаты центров тяжести каждой отдельной фигуры, (так как представленное сечение колонны осесимметричное, относительно оси $y$, нам достаточно вычислить центр тяжести по одной координате, относительно вспомогательной случайной оси $z_1$); произведения $F_i y_i$– статические моменты относительно $z_1$. Все расчеты можно представить в виде таблицы 4.

Таблица 4 – Геометрические характеристики

| № | $F_i,(см^2)$ | $y_i,(см^2)$ | $F_i y_i,(см^3)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 216 | 9 | 1944 |
| 2 | 24 | 6 | 144 |
| 3 | 24 | 6 | 144 |
| ∑ | 264 | | 2232 |

Суммировав столбцы, находим общую площадь и статический момент относительно оси $z_1$, а затем определяем координаты центра тяжести всего поперечного сечения по формулам:

$z_c = 0$ (так как фигура осесимметрична относительно оси $y$);

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} = \frac{2232}{264} = 8{,}455(см).$$

На чертеже (рисунок 19) проведем центральную ось $z$, проходящую через центр тяжести.

5.2.2 Нахождение моментов инерции $J_z, J_y$.

Руководствуясь рисунком 19 и приложением Д, вычислим координаты $z_i, y_i$, каждой из трех частей сечения в системе $zOy$:

$$y_1 = 0{,}545(см), \quad y_2 = y_3 = -2{,}455(см),$$

$$z_1 = 0(см), \quad z_2 = -8(см), \quad z_3 = 8(см).$$

Определяем моменты инерции каждого из участков сечения относительно собственных осей $z_i, y_i$ параллельных $z$ и $y$.

$$J_z^1 = \frac{3a\cdot(6b)^3}{12} = \frac{12\cdot 18^3}{12} = 5832(см^4), \quad J_y^1 = \frac{6b\cdot(3a)^3}{12} = \frac{18\cdot 12^3}{12} = 2592(см^4);$$

$$j_z^{2,3} = \frac{a\cdot(2b)^3}{12} = \frac{4\cdot 6^3}{12} = 72(см^4) \quad J_y^{2,3} = \frac{2b\cdot a^3}{12} = \frac{6\cdot 4^3}{12} = 32(см^4).$$

Общая площадь поперечного сечения колонны $F = 264см^2$, как видно из таблицы 4.

Вычислим по следующим формулам главные моменты инерции сечения:

$$J_z = \sum\left(J_z^i + F_i y_i^2\right) = \left\{(5832+72+72) + \left(216\cdot 0{,}545^2 + 24\cdot 2{,}455^2 + 24\cdot 2{,}455^2\right)\right\} =$$
$$= 6329{,}488(см^4);$$
$$J_y = \sum\left(J_y^i + F_i z_i^2\right) = \left\{(2592+32+32) + \left(216\cdot 0^2 + 24\cdot 8^2 + 24\cdot 8^2\right)\right\} =$$
$$= 5728(см^4).$$

5.2.3 Рассчитаем квадраты радиусов инерции.

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{6329{,}448}{264} = 23{,}975(см^2);$$
$$i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{5728}{264} = 21{,}697(см^2).$$

5.2.4 Определяем координаты (эксцентриситеты) $e_z, e_y$ центра давления «*К*» по схеме поперечного сечения опоры, которая должна быть вычерчена в строгом масштабе:

$$e_z = -(2{,}5a) = -(2{,}5\cdot 4) = -10(см);$$
$$e_y = -(y_c - b) = -(8{,}455 - 3) = -5{,}455(см).$$

5.2.5 Найдем отрезки отсекаемые нулевой линией на координатных осях «*n-n*» (рисунок 19):

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} = \frac{21{,}697}{10} = 2{,}1697(см);$$
$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} = \frac{23{,}975}{5{,}455} = 4{,}395(см).$$

5.2.6 Определим координаты опасных точек $A_c$ и $A_p$ поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии «*n-n*»:

$$A_c(-10;-5{,}455), \quad A_p(6;9{,}545).$$

5.2.7 Выведем формулы экстремальных нормальных напряжений $\sigma_c$ и $\sigma_p$, зависящих функционально от по еще неизвестной силы $P$, то есть $\sigma_c = \sigma_c(P)$ и $\sigma_p = \sigma_p(P)$.

$$\sigma = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2}\right);$$

$$\sigma_c = -\frac{P}{264}\left(1 + \frac{5{,}455 \cdot 5{,}455}{23{,}975} + \frac{10 \cdot 10}{21{,}697}\right) = -0{,}0259P;$$

$$\sigma_p = -\frac{P}{264}\left(1 - \frac{5{,}455 \cdot 9{,}545}{23{,}975} - \frac{10 \cdot 6}{21б697}\right) = 0{,}0149P.$$

5.2.8 Определим из условий прочности два предельных значения $\lfloor P_p \rfloor$ и $[P_c]$, сжимающего усилия $P$, наименьшее из которых будет являться искомой допускаемой нагрузкой $[P]$.

$$[\sigma_c] = |0{,}0259[P_c]| \Rightarrow [P_c] = \frac{[\sigma_c]}{0{,}0259} = \frac{10000}{0{,}0259} = 386100{,}386(н);$$

$$[\sigma_p] = |0{,}0149[P_p]| \Rightarrow [P_p] = \frac{[\sigma_p]}{0{,}0149} = \frac{2500}{0{,}0149} = 167785{,}235(н).$$

Искомой нагрузкой $[P]$ является $\lfloor P_p \rfloor = 167785{,}235(н)$, так как из двух найденных усилий она наименьшая.